

УДК 539.3

**СТРУКТУРНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ МНОГОЛЕНТОЧНЫХ МАТРИЦ, ВОЗНИКАЮЩИХ В  
ЗАДАЧЕ СЕЙСМОРАЗВЕДКИ****А.В. СМАГЛИЧЕНКО<sup>1</sup>, М.К. САЯНКИНА<sup>2</sup>**<sup>1</sup> ЗАО «RTSoft» (Средства и системы автоматизации), <sup>2</sup> Институт проблем нефти и газа РАН, г. Москва  
E-mail: [asmaglichenko@dev.rtsoft.ru](mailto:asmaglichenko@dev.rtsoft.ru); [msayankina@gmail.com](mailto:msayankina@gmail.com)**STRUCTURAL ALGORITHM TO INVERT LARGE BANDED MATRIX ARISED IN THE PROBLEM OF  
SEISMIC EXPLORATION****A.V. SMAGLICHENKO, M.K. SAYANKINA***RTSoft (Software Hardware Systems), Oil and Gas Research Institute of RAS, Moscow***Аннотация**

Структурный алгоритм был разработан для того, чтобы решить разреженную линейную систему с многоленточной матрицей и правой частью — вектором, содержащим однородные и другие координаты. Матрицы такой формы типичны для площадных сейсмических наблюдений в местах добычи нефти и газа. Впервые её конструкция представляется в данной работе. Алгоритм определен на базе использования модификации метода исключения Гаусса, недавно предложенной для решения больших и разреженных линейных систем.

**Ключевые слова:** многоленточная матрица, модификация метода исключения Гаусса, сейсморазведка.

**Summary**

The structural algorithm was developed to solve sparse linear system having large banded matrix and the right side, which is a vector containing the group of equal coordinates among others. Such matrix is typical for seismic observations in areas of oil and gas exploration. In this article we present, for the first time, the construction of the matrix. The algorithm was determined using the modification of Gaussian elimination that was recently proposed to solve large and sparse linear systems.

**Key words:** large banded matrix, the modification of Gaussian elimination, seismic exploration.

---

**Введение**

Общепринятые методы решения систем линейных уравнений, возникающих при работе с сейсмическими данными, являются итерационными [1, 2]. Это объясняется тем, что прямые методы, такие как метод исключения Гаусса, не могут надежно решать большие и разреженные системы из-за ограничений машинной памяти при представлении чисел и соответственно, накопления ошибок округления. Однако, использование метода Гаусса имеет преимущества, которые во-первых, в простоте вычислительной схемы, используемой в течение многих десятилетий и, во-вторых, в том, что можно избежать проблем, связанных со сходимостью итерационных методов. В то же время, следует отметить, что присутствие в итерационных методах большого количества рекуррентных формул может также способствовать появлению ошибок округления, что приводит к потере адекватности получаемых решений и заставляет исследователей искать новые алгоритмы для преодоления этих трудностей. В связи с этим не так давно была разработана модификация метода исключения Гаусса [3], согласно которой обращение исходной матрицы, содержащей большое количество нулей, производится путем предварительного разделения её на меньшие составляющие (подматрицы) и путем сравнения точных решений этих составляющих между собой для получения надежного устойчивого результата. В этой статье мы представляем алгоритм применения модификации исключения Гаусса для системы линейных уравнений, которая включает многоленточную матрицу, характерную для данных наблюдений скоплений сейсмических событий, происходящих в районах разведки полезных ископаемых.

## 1. Многоленточная матрица площадных сейсмических наблюдений

Пусть группа сейсмических станций равномерно распределена на площади, которая представляет интерес для газодобычи и характеризуется присутствием сейсмических событий. Рассмотрим распределение сейсмических лучей, полученных при распространении продольных  $P$ -волн от поверхностных источников, наиболее часто характеризующих места нефтедобычи [4]. Предположим мы исследуем 2-мерный разрез Земли, на поверхности которого вдоль профиля сейсмические станции зарегистрировали данные  $P$ -волн от источников на определенных глубинах. Источники, как правило, располагаются кластерами, представляющими собой места скопления сейсмической активности. В соответствии с кластерами формируются пучки сейсмических лучей, покрывающих сеткой исследуемую область. Область под станциями разбивается на блоки геологической среды, имеющей свои характеристики — скорости прохождения сейсмической волны через эти блоки (см. рис. 1).

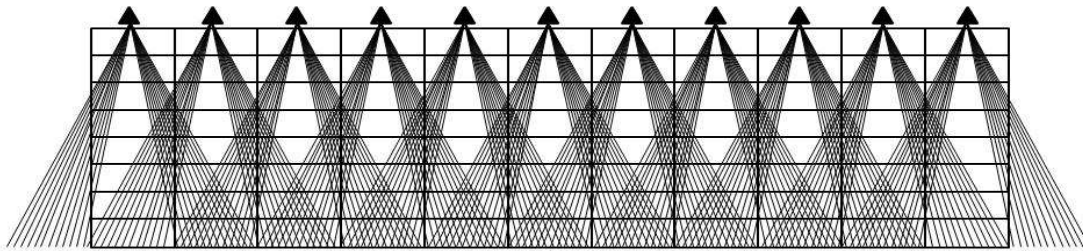


Рис. 1: Расстановка сейсмических станций (обозначены треугольниками) и распределение сейсмических лучей (обозначены прямыми линиями). Прямоугольники соответствуют геологическим блокам среды.

Каждый сейсмический луч проходит через группу блоков. Взаимное расположение блоков и лучей формирует наблюдаемую матрицу в системе линейных уравнений, которая связывает неизвестные значения вектора вариаций сейсмической скорости в блоках и известные значения правой части, представляющей собой задержки времен прихода  $P$ -волны на сейсмические станции. Задержки времен прихода определяются относительно времен, рассчитанных для известной опорной модели исследуемой среды. Таким образом, система линейных уравнений

$$Ax = b \quad (1)$$

имеет следующие особенности. Если блок не был пересечен сейсмическим лучом, то в этом случае соответствующий элемент наблюдаемой матрицы имеет значение, равное нулю, а в противном случае значение элемента отлично от нуля. Из-за кластерного характера размещения источников матрица является сильно разреженной. В случае сильной сейсмичности в регионе матрица имеет большой размер, так как ежегодный сбор информации способствует её увеличению.

Рассмотрим пример матрицы, состоящей из 264 строк и 88 столбцов. Рисунок 2 показывает её конструкцию. Ненулевые элементы матрицы закрашены в черный цвет, в то время как нулевые элементы представлены пустыми клетками. Матрица содержит 8 диагоналей.

## 2. Структурный алгоритм для решения системы

Предлагаемый алгоритм основан на модификации метода исключения Гаусса для решения больших и разреженных систем. Модифицированный метод использует тот факт, что при построении решения нулевые элементы матрицы являются информацией, которая может быть исключена из использования. Исходная разреженная матрица разбивается на клетки, часть из которых содержит нулевые подматрицы,

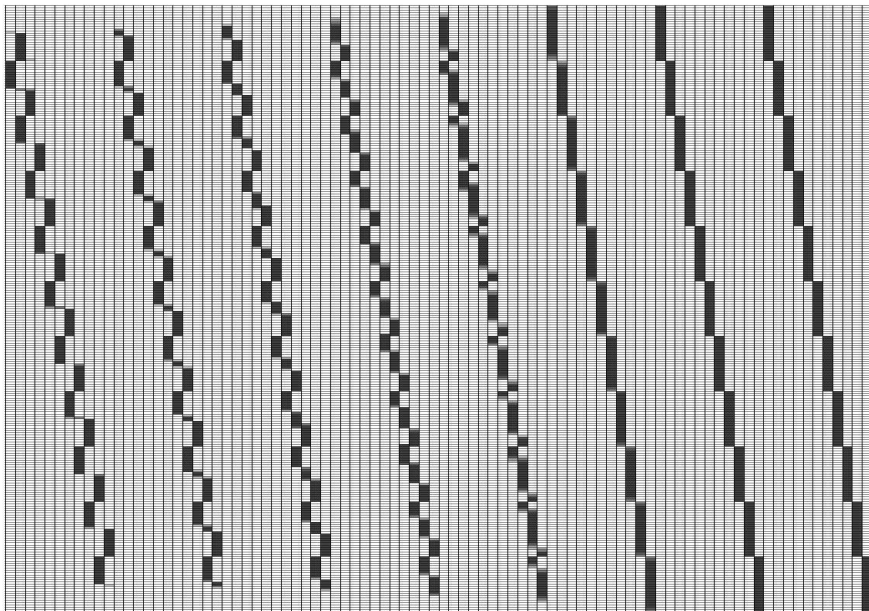


Рис. 2: Конструкция матрицы системы линейных уравнений, описывающих распределение сейсмических лучей в местах добычи нефти и газа.

а другая часть соответствует подматрицам, большинство элементов которых отлично от нуля. Таким образом, решение исходной большой системы сводится к решению системы подсистем меньшей размерности, содержащих подматрицы с ненулевыми элементами. При этом неизвестный вектор исходной системы разделяется на вектора, отвечающие подсистемам. Соответственно, исходный вектор наблюдаемых значений, имеющих физический смысл задержек времен пробега  $P$ -волн, также разделяется на массивы значений, которые являются правыми частями подсистем. Отдельно взятая подсистема исследуется с точки зрения выполнения условий теоремы Кронекера-Капелли, которая, как известно, определяет существование единственного решения системы. В случае возможности выбора линейно независимых строк расширенной подматрицы, количество которых равно числу неизвестных, подсистема обращается любым инверсионным методом, включая удобный в данном случае метод Гаусса-Жордана. Выбор окончательного решения базируется на сравнении решений подсистем для одной и той же координаты неизвестного вектора исходной системы. После нахождения устойчивых значений для неизвестных координат, они исключаются из системы (1) путем их вычитания. Процесс повторяется с целью определения следующих неизвестных. Отметим, что при работе с множеством подсистем допускается параллельная реализация модификации метода Гаусса [5].

Однако, на практике отдельно взятая подсистема может не подчиняться условиям теоремы Кронекера-Капелли. Это связано с тем, что правая часть подсистемы может быть представлена однородными, равными между собой координатами. Данная ситуация обусловлено тем, что в местах нефтедобычи сейсмические лучи часто проходят через однородную геологическую среду, например, песок. Вариации сейсмической скорости для блоков, составляющих одну и ту же геологическую породу, будут одинаковы и соответственно одинаковы будут задержки времени для сейсмических лучей, пересекающих эти блоки. Численно это будет выражаться в группе равных значений, присутствующих в правой части системы, исходном векторе наблюдений. Для получения решения подсистемы используется другая схема вычислений. А именно, применяется метод скорейшего спуска, который в данном случае дает более надежные результаты, чем общепринятые итерационные методы [6]. Поэтому для решения систем, возникающих при разведке полезных ископаемых, необходимо применять алгоритм, учитывающий особенности структуры правой части системы.

Пошагово структурный алгоритм может быть описан как следующий:

1. Исходная матрица разбивается на прямоугольные клетки, пересекающие ленты матрицы вдоль ее строк таким образом, чтобы элементы лент соответствовали различным столбцам в пределах одной и той же клетки.
2. Из ненулевых элементов матрицы для каждой клетки формируются слабо разреженные подматрицы.
3. Правые части подматриц анализируются и выделяются в первую очередь те, у которых правые части представлены в виде векторов с однородными координатами. Обращение таких подматриц осуществляется с помощью метода скорейшего спуска. Обращение других подматриц проводится с использованием теоремы Кронекера-Капелли.
4. Полученные в п.3 решения сравниваются для одной и той же координаты неизвестного вектора.
5. Устойчивые решения для найденных координат неизвестного вектора вычитаются из исходной системы согласно прямому методу исключения Гаусса. Процесс повторяется путем возвращения к п.1

### 3. Заключение

Описанный в данной статье алгоритм может быть использован в других областях физики, где возникают задачи решения систем с многоленточными матрицами и правыми частями, содержащими группы равных (однородных) координат. Конструкция матриц может быть разной, но принцип решения остается тот же.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Paige C.C., Saunders M.A.** LSQR: an algorithm for sparse linear equations and sparse least squares // ACM Trans. Math. Soft. — 1982. — № 8. — P. 43–71.
2. **Lanczos C.** Applied Analysis. — Hall, Inc. New, 1956. — 539 p.
3. **Smaglichenko T.A.** Modification of Gaussian elimination for the Complex System of Seismic Observations // Complex Systems Journal founded by Stephen Wolfram. — 2012. — V. 20, № 3. — P. 229–241.
4. **Smaglichenko T.A.** Modification of Gaussian elimination for the Complex System of Seismic Observations // Complex Systems Journal founded by Stephen Wolfram. — 2012. — V. 20, № 3. — P. 229–241.
5. **Jing C., Carazzone J.J., Rumpfhuber E.-M., Saltzer R.L., Dickens T.A., Mullur A.A.** Hydrocarbon detection with passive seismic data // US Patent Application. — Publication date 20.10.2011. — USPC Class: 367 73. — Number: 20110255371. — [0002]-[0108].
6. **Смагличенко Т.А., Саянкина М. К., Смагличенко А.В., Лукьяница А.А.** Параллельная реализация модификации метода Гаусса для больших разреженных систем в обратных задачах сейсмологии [Электронный ресурс] // Эвристические алгоритмы и распределенные вычисления. — 2014. — Т. 1, № 3. — С. 77–89. Режим доступа: <http://www.samsu.ru/ru/node/4736>
7. **Smaglichenko T.A., Sayankina M.K., Smaglichenko A.V.** Computational structure to retrieve a complex seismic structure of hydrocarbon model / Emergence, Complexity, Computations. Book series. — Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer Publisher, 2013. — V. 5. — P. 215–237.

### REFERENCES

1. **Paige C.C., Saunders M.A.** LSQR: an algorithm for sparse linear equations and sparse least squares // ACM Trans. Math. Soft. — 1982. — № 8. — P. 43–71.

2. **Lanczos C.** Applied Analysis. – Hall, Inc. New, 1956. – 539 p.
3. **Smaglichenko T.A.** Modification of Gaussian elimination for the Complex System of Seismic Observations // Complex Systems Journal founded by Stephen Wolfram. – 2012. – V. 20, № 3. – P. 229–241.
4. **Smaglichenko T.A.** Modification of Gaussian elimination for the Complex System of Seismic Observations // Complex Systems Journal founded by Stephen Wolfram. – 2012. – V. 20, № 3. – P. 229–241.
5. **Jing C., Carazzone J.J., Rumpfhuber E-M., Saltzer R.L., Dickens T.A., Mullur A.A.** Hydrocarbon detection with passive seismic data // US Patent Application. – Publication date 20.10.2011. – USPC Class: 367 73. – Number: 20110255371. – [0002]-[0108].
6. **Smaglichenko T.A., Sayankina M.K., Smaglichenko A.V., Lukyanitsa A.A.** Parallel implementation of modification of Gaussian elimination for large and sparse systems in inversion problems of seismology [Electronic resource] // Heuristic algorithms and distributed computations . – 2014. – V. 1, № 3. – P. 77-89. Access mode: <http://www.samsu.ru/ru/node/4736>.
7. **Smaglichenko T.A., Sayankina M.K., Smaglichenko A.V.** Computational structure to retrieve a complex seismic structure of hydrocarbon model / Emergence, Complexity, Computations. Book series. – Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer Publisher, 2013. – V. 5. – P. 215-237.